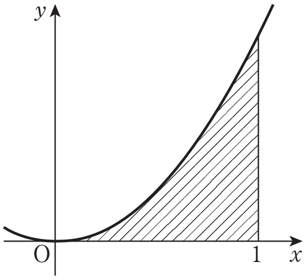
第19講　区分求積法，定積分と不等式

PART1　区分求積法と定積分

要点整理と公式

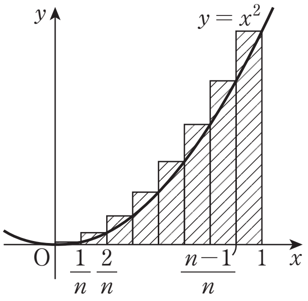
要点①　区分求積法



曲線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\qquad\qquad=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

のように，定積分を用いて求めることができる。

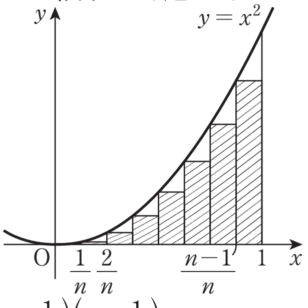


ここで，区間 [0, 1] を　　　　　し，分割した小区間を底辺，各小区間の右端の y の値を高さとする n 個の長方形をつくり，その面積の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\qquad\left(\qquad\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}=S$ であるから，$n\to\infty$ のとき S_n は S に限りなく近づく。



また，各区間の左端の y の値を高さとする n 個の長方形の和を T_n とすると

$$T_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

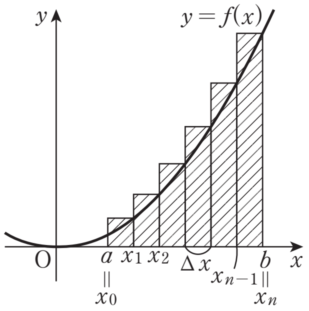
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=\quad}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=\quad}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{3}=S$ であるから，$n\to\infty$ のとき T_n は S に限りなく近づく。

このように，ある図形を長方形に分割し，その面積の　　　　　として図形の面積を求める方法を「　　　　　　」という。

要点② 区分求積法と定積分

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x)\geqq 0$ のとき，面積 $S=\int_a^b f(x)dx$ を区分求積法で考える。



区間 $[a,\ b]$ を n 等分し，その分点を a に近い方から順に x_1，x_2，……，x_{n-1} とし，$a=x_0$，$b=x_n$ とする。

また，分割した小区間の幅を Δx とすると，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ である。このとき，右図の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n=\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\cdots\cdots+\Delta x\cdot f(x_n)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

であり，$n\to\infty$ のとき，S_n は S に限りなく近づく。また

$$T_n=\Delta x\cdot f(x_0)+\Delta x\cdot f(x_1)+\cdots\cdots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x$$

において，$n\to\infty$ のとき，T_n は S に限りなく近づく。

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であれば，常に $f(x)\geqq 0$ でなくとも，次のことが成り立つ。

区分求積法と定積分①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

ただし，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

上の公式において，$a=0$，$b=1$ とすると，$\Delta x=\dfrac{1}{n}$，$x_k=\dfrac{k}{n}$ となり，次の等式が成り立つ。

区分求積法と定積分②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

(ex) $S=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^6}(1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^5=\lim_{n\to\infty}\quad\sum_{k=1}^{n}\Big(\quad\Big)^5$

$f(x)=\quad{}^5$ とおくと $S=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\quad dx=\left[\dfrac{1}{6}x^6\right]_0^1=\dfrac{1}{6}$

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

Point Pickup

区分求積法と定積分

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

とくに $a=0$，$b=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

第19講 PART1 確認問題

次の極限値を求めよ。

答えは下の選択肢のうちから選べ。

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\int_0^1 \boxed{\text{ア}}\,dx$

$=\boxed{\text{イ}}$

[$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢]

① $\cos x$　② $\cos \pi x$

③ $\cos\frac{\pi}{2}x$　④ $\sin\frac{\pi}{2}x$

[$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{1}{\pi}$

③ $\frac{2}{\pi}$　④ $-\frac{2}{\pi}$

2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\int_0^1 \boxed{\text{ウ}}\,dx$

$=\boxed{\text{エ}}$

[ウ の選択肢]

① $\sqrt{x}$　② $x\sqrt{x}$

③ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　④ $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

[エ の選択肢]

① 1　② $\dfrac{2}{3}$

③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\dfrac{3}{4}$

3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+n}\right)^2\right\}$

$=\displaystyle\int_0^1 \boxed{\text{オ}}\,dx$

$=\boxed{\text{カ}}$

[オ の選択肢]

① $\dfrac{1}{x^2}$　② $(1+x)^2$

③ $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2$　④ $\dfrac{1}{1+x^2}$

[カ の選択肢]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$

③ $-\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$

[MEMO]

第19講　区分求積法，定積分と不等式

PART1　区分求積法と定積分

1　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

[解答]

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\pi\cdot\frac{k}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{nk}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

第19講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：③

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$$ [A]

$$=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

[A]　区分求積法と定積分
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

2　**[正解]** ウ：①，エ：②

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$ [B]

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}$$

[B]　まずは，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形で表す。
この場合，$f(x)=\sqrt{x}$ である。

3 **[正解]** オ：③，カ：②

[解説]

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$$ [C]

[C] $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形で表す。

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx$$

$$=\int_0^1(1+x)^{-2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$